SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

A. CAVALLUCCI

INCLUSIONI DIFFERENZIALI ALEATORIE

20 APRILE 1989

Consideriamo l'inclusione differenziale

$$\frac{\partial}{\partial t}x(\omega,t) \in F(\omega,t,x(\omega,t)), \quad \omega \in \Omega, \quad 0 \leq t \leq L ,$$

dove ω è una variabile casuale e F una assegnata multifunzione a valori in uno spazio di Banach. Per F a valori convessi sono noti vari risultati di esistenza sia in R^n [9], [10], [11] che negli spazi di Banach separabili [4], [10], [11]. Per F a valori in R^n, non necessariamente convessi, sono noti risultati di esistenza per F lipschitziana nella variabile x [9] oppure per F continua in (t,x) [6]. Qui ci proponiamo di ottenere un teorema di esistenza per F a valori non necessariamente convessi in uno spazio di Banach separabile. Questo costituisce una "estensione probabilistica" di un teorema di esistenza per inclusioni differenziali ordinarie dovuto a Tolstonogov e Finoghenko [12], ottenuta utilizzando un teorema di esistenza di selezioni di tipo Caratheodory dovuto a Artstein-Prikry [1] e un teorema di esistenza di selezioni continue dovuto a Bressan-Colombo [3].

Indichiamo con (Ω,μ) uno spazio metrico Ω completo e separabile con una misura μ finita e completa definita su una σ-algebra $\mathcal{A}$ contenente la σ-algebra $\mathcal{B}(\Omega)$ di Borel e tale che per ogni $A \in \mathcal{A}$ riesca

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid A \supset K \text{ compatto}\}.$$

Indichiamo con T l'intervallo limitato [0,L] di R e con $\mathcal{L}$ la σ-algebra dei sottoinsiemi di T misurabili secondo Lebesgue.

Indichiamo con $(X,|\cdot|)$ uno spazio di Banach separabile, con S la sfera $\{x \in X \mid |x| \leq 1\}$, e indichiamo con $C(T,X)$ e $L^1(T,X)$ rispettivamente lo spazio delle funzioni continue da T a X e lo spazio delle (classi di) funzioni sommabili secondo Bochner da T a X, ciascuno con la propria norma naturale, rispetto alla quale è uno spazio di Banach separabile. Indichiamo con $\bar{A}$ la chiusura dell'insie

me A e con d(x,A) la sua distanza dal punto x. Useremo lo stesso simbolo per indicare sia una multifunzione che il suo grafico.

Siano date la funzione

$$x_0 : \Omega \to X$$

misurabile e la funzione

$$g : \Omega \times T \to [0,+\infty[$$

$\mathcal{A} \otimes \mathcal{L}$ misurabile e tale che

$$0 < g_0(\omega) = \int_T g(\omega,t)dt < \infty , \quad \forall \omega \in \Omega,$$

ove $\mathcal{A} \otimes \mathcal{L}$ rappresenta la σ-algebra generata da $\{A \times B | A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{L}\}$.

Sia

$$D = \{(\omega,t,x) \in \Omega \times T \times X | \ |x - x_0(\omega)| \leq g_0(\omega)\}$$

e sia data la multifunzione

$$D \ni (\omega,t,x) \to F(\omega,t,x) \neq \emptyset \text{ compatto} \subset g(\omega,t)S \subset X$$

verificante le seguenti condizioni

(H1) $F(\cdot,\cdot,x)$ è $\mathcal{A} \otimes \mathcal{L}$ misurabile per ogni x;

(H2) $F(\omega,t,\cdot)$ è continua per ogni ω e t;

(H3) per ogni insieme limitato $C \subset X$ tale che $\{(\omega,t)\} \times C \subset D$ si ha

$$h[F(\omega,t,C)] \leq \chi_\omega(t,h(C))$$

Ricordiamo che una multifunzione G si dice *misurabile* se

$$G^{-1}(O) = \{\omega \mid G(\omega) \cap O \neq \emptyset\}$$

è misurabile per ogni aperto O, si dice *inferiormente semicontinua* se G^{-1}(aperto) = aperto, si dice *superiormente semicontinua* se G^{-1} (chiuso) = chiuso, si dice *continua* se G è contemporaneamente inferiormente e superiormente semicontinua. Per una trattazione sistematica di queste proprietà rimandiamo a [2] e [4].

In (H3) abbiamo indicato con h(C) la *misura di non compattezza* di C secondo Hausdorff e con χ_ω una funzione di Kamke, ossia

$$T \times [0,+\infty[\ni (t,r) \to \chi_\omega(t,r) \in [0,+\infty[, \quad \omega \in \Omega,$$

$\chi_\omega(t,o) = 0$ per $t \in T$,

$\chi_\omega(t,\cdot)$ continua per quasi ogni t,

$\chi_\omega(\cdot,r)$ misurabile per ogni r,

per ogni R>0 esiste g_R sommabile tale che

$\chi_\omega(t,r) \leq g_R(t)$ per $0 \leq r \leq R$,

l'unica funzione assolutamente continua $f:T \to [0,+\infty[$ che verifica le condizioni

$$f(t') \leq f(t) + \int_t^{t'} \chi_\omega(s,f(s))ds \quad \text{per} \quad 0 \leq t \leq t' \leq L, \ f(o) = 0$$

è data da $f(t) = 0$ per $t \in T$.

Un esempio di funzione χ_ω è dato da

$$\chi_\omega(t,r) = g_\omega(t)r$$

con $0 \leq g_\omega$ sommabile.

TEOREMA. Sotto le ipotesi (H1), (H2), (H3) esistono la funzione misurabile

$$v:\Omega \to L^1(T,X)$$

e l'insieme misurabile $\Omega_0 \subset \Omega$ tali che $\mu(\Omega_0) = 0$ e, posto

$$x(\omega,t) = x_0(\omega) + \int_0^t v(\omega)\,(s)ds, \quad (\omega,t) \in \Omega \times T,$$

la funzione

$$\Omega \ni \omega \to x\,(\omega,t)$$

è misurabile per ogni $t \in T$ e per $\omega \in \Omega \setminus \Omega_0$ si ha

$$v(\omega)(t) \in F(\omega,t,x(\omega,t)) \quad , \quad t - q.d.$$

Se $U \subset C(T,X)$ e $A \subset X$, poniamo (cfr. [12], [5])

$$U(t) = \{u(t) \mid u \in U\},$$

$$F(\omega,t,A) = \bigcup_{x \in A} F(\omega,t,x),$$

$$I(\omega,U) = \{T \ni t \to x_0(\omega) + \int_0^t u(s)ds \mid u \in L^1(T,X),$$

$$u(s) \in \overline{co}\ F(\omega,s,\overline{U(s)}) \ , \ s\text{-q.d.}\},$$

ove $\overline{co}A$ indica l'involucro convesso chiuso dell'insieme A.

La dimostrazione del Teorema si fonda sulle proposizioni e sui lemmi che seguono.

Proposizione 1. Per ogni $\omega \in \Omega$ poniamo

$$V_0(\omega) = \{T \ni t \mapsto x_0(\omega) + \int_0^t u(s)ds \,|\, u \in L^1(T,X), |u(s)| \leq g(\omega,s), \text{ s-q.d.}\},$$

$$U_0(\omega) = \overline{V_0(\omega)},$$

$$U_{n+1}(\omega) = I(\omega, U_n(\omega)) \quad , \quad n \geq 0.$$

Supponiamo che F verifichi le condizioni (H1), (H2), (H3). Allora si ha per $n \geq 0$

a) $\emptyset \neq U_{n+1}(\omega) \subset U_n(\omega)$ equicontinuo e limitato in C(T,X);

b) posto, per $\omega \in \Omega$,

$$h_n(t) = h[U_n(\omega)(t)] \quad , \quad t \in T,$$

si ha

$$h_{n+1}(t') \leq h_{n+1}(t) + \int_t^{t'} \chi_\omega(s, h_n(s))ds \quad \text{per} \quad t \leq t';$$

c) $\emptyset \neq U(\omega) = \bigcap_{n=0}^{\infty} U_n(\omega)$ = compatto in C(T,X);

d) $V(\omega) = I(\omega, U(\omega))$ = compatto convesso $\neq \emptyset$ e

$$I(\omega, V(\omega)) \subset V(\omega) \subset U(\omega);$$

e) la multifunzione $\Omega \ni \omega \to V(\omega)$ è misurabile.

Dall'ipotesi (H1) segue ([4], Theor. III.9) che per ogni $x,y \in X$ è misurabile la funzione

$$\Omega \times T \ni (\omega,t) \to d(y,F(\omega,t,x)) \in R.$$

E' noto che di qui segue la misurabilità per ogni ω,x,y della funzione

$$T \ni t \to d(y,F(\omega,t,x))$$

e quindi ([4], Theor. III.9) la $\mathscr{L}$ misurabilità per ogni ω,x della multifunzione

$$T \ni t \to F(\omega,t,x).$$

Di qui e da (H2) segue che per ogni $\omega \in \Omega$ sono verificate le ipotesi della Proposizione 5 di [5] da $F(\omega,\cdot,\cdot)$ (cfr. anche [12], Lemma 1.3, 1.4, Theor. 3.1).
La dimostrazione della Proposizione 5 di [5] continua a valere, con ovvie modifiche, anche con la funzione $I(\omega,U)$ qui considerata (che differisce dalla precedente per la sostituzione di $U(s)$ con $\overline{U(s)}$). Pertanto valgono senz'altro le affermazioni a)-d).

Per provare l'affermazione c) premettiamo alcuni Lemmi.

Lemma 1. Siano Y, Z spazi metrici completi separabili e sia

$$\Omega \ni \omega \to K(\omega) \neq \emptyset \text{ chiuso in } Y$$

misurabile,

$$\Omega \times Y \ni (\omega,y) \to H(\omega,y) \neq \emptyset \text{ limitato} \subset Z$$

misurabile rispetto a ω e semicontinua rispetto a y e alla distanza di Hausdorff sui sottoinsiemi limitati di Z. Posto

$$L(\omega) = H(\omega, K(\omega)) = \bigcup_{y \in K(\omega)} H(\omega,y),$$

si ha

i) H è $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}(Y)$ misurabile;

ii) L è misurabile.

Osservazione. E' noto che se i valori $H(\omega,y)$ sono compatti la continuità rispetto alla distanza di Hausdorff è equivalente alla continuità definita all'inizio (cfr. [2]).

Per provare i) seguiamo [11], Theor. 3.3., ponendo

$$h(A,B) = \max\{\sup_{a \in A} d(a,B), \sup_{b \in B} d(b,A)\}.$$

Si ha per ogni $z \in Z$ e, $y, y' \in Y$

$$|d(z,H(\omega,y')) - d(z,H(\omega,y))| \leq h[H(\omega,y'), H(\omega,y)]$$

e quindi la funzione

$$Y \ni y \longrightarrow d(z,H(\omega,y))$$

è continua. Per ipotesi la funzione

$$\Omega \ni \omega \to d(z,H(\omega,y))$$

è misurabile e quindi ([4], Lemma III.14) la funzione

$$\Omega \times Y \ni (\omega,y) \to d(z,H(\omega,y))$$

è $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}(Y)$ misurabile. Allora ([4], dimostrazione del Theor. III.9) anche H è $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}(Y)$ misurabile.

Per provare ii) osserviamo che per ogni aperto O in Z si ha

$$L^{-1}(O) = \{\omega\in\Omega \mid O\cap H(\omega,K(\omega)) \neq \emptyset\} = \pi_{\Omega}(K\cap H^{-1}(O)),$$

con $\pi_{\Omega}(\omega,y) = \omega$ e $K \in \mathscr{A}\otimes\mathscr{B}(Y)$ ([4], Propos. III.13) e $H^{-1}(O)\in\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}(Y)$ per quanto provato sopra. Ne segue ([4], Theor. III.23) che $L^{-1}(O)\in\mathscr{A}$ e quindi che L è misurabile.

Lemma 2. Data la multifunzione $\mathscr{A}\otimes\mathscr{L}$ misurabile

$$\Omega\times T \ni (\omega,t) \longrightarrow G(\omega,t) \neq \emptyset \text{ chiuso} \subset g(\omega,t)S$$

e posto

$$H_G(\omega) = \{u\in L^1(T,X) \mid u(t)\in G(\omega,t),\ t\text{-q.d.}\}\ ,\quad \omega\in\Omega,$$

$$I_G(\omega) = \{T\ni t \to x_0(\omega) + \int_0^t u(s)ds \mid u\in H_G(\omega)\},\ \omega\in\Omega,$$

si ha $H_G(\omega) \neq \emptyset$ chiuso per ogni ω e H_G e I_G sono misurabili.

Siccome $G(\omega,t)$ è chiuso, anche $H_G(\omega)$ è chiuso (cfr. [5], Teorema 2). Dall'ipotesi di misurabilità per G segue che per ogni $\omega\in\Omega$ è misurabile la funzione

$$T\ni t \to G(\omega,t) \neq \emptyset \text{ chiuso} \subset g(\omega,t)S \subset X$$

e quindi esiste ([4], Theor. III.8) una selezione misurabile

$$T \ni t \to u(t) \in G(\omega,t)$$

per la quale si ha

$$\int_T |u(t)|dt \leq \int_T g(\omega,t)dt = g_0(\omega) < \infty.$$

Dunque $u \in H_G(\omega)$.

Si ha (cfr. [8], [9], [10])

$$(\omega,u) \in H_G \Longleftrightarrow d(u(t), G(\omega,t)) = 0, \quad t\text{-q.d.}$$

La funzione

$$(\omega,t) \longrightarrow d(x,G(\omega,t))$$

è $\mathscr{A} \otimes \mathscr{L}$ misurabile per ogni $x \in X$, mentre la funzione

$$x \longrightarrow d(x,G(\omega,t))$$

è continua e la funzione

$$(\omega,t) \longrightarrow u(t)$$

è $\mathscr{A} \otimes \mathscr{L}$ misurabile. Ne segue che la funzione

$$(\omega,t) \longrightarrow d(u(t), G(\omega,t))$$

è $\mathscr{A} \otimes \mathscr{L}$ misurabile. Allora si ha anche

$$(\omega,u) \in H_G \Longleftrightarrow \gamma(\omega,u) = \int_T d(u(t), G(\omega,t))dt = 0$$

e la funzione $\gamma(\cdot,u)$ è misurabile su Ω. Proviamo che $\gamma(\omega,\cdot)$ è continua. Si ha infatti

$$|\gamma(\omega,u) - \gamma(\omega,v)| \leq \int_T |d(u(t), G(\omega,t)) - d(v(t), G(\omega,t))|dt \leq$$

$$\leq \int_T |u(t) - v(t)|dt.$$

Dunque γ è $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}(L^1(T,X))$ misurabile ([4], Lemma III.14) e quindi

$$H_G = \gamma^{-1}(o) \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}(L^1(T,X))$$

Siccome i valori di H_G sono chiusi non vuoti, di qui segue ([4], Theor. III.30) che H_G è misurabile.

Ora poniamo

$$f(\omega,u)(t) = x_o(\omega) + \int_0^t u(s)ds, \quad \omega \in \Omega, \quad u \in L^1(T,X), \ t \in T.$$

Allora si ha $f(\omega,u) \in C(T,X)$,

$$\| f(\omega,u)-f(\omega,v), C(T,X)\| \leq \|u-v, L^1(T,X)\|$$

e quindi $f(\omega,\cdot)$ è continua. Inoltre $f(\cdot,u)$ è misurabile e quindi la misurabilità di I_G si ottiene dal Lemma 1 con

$$L(\omega) = f(\omega,H_G(\omega)) = I_G(\omega)$$

Lemma 3. Sia A convesso non vuoto nello spazio normato Y e sia $y_o \notin \bar{A}$. Allora esiste $f_o: Y \to R$ lineare e continuo tale che

$$|f_0| = \sup_{|y|\le 1} |f_0(y)| = 1,$$

$$d(y_0,A) = \inf_{a\in A} f_0(a-y_0).$$

Si ha

$$r = d(y_0,A) > 0.$$

Posto

$$S_r(y_0) = \{y\in Y|\ |y-y_0| < r\},$$

si ha $S_r(y_0)\cap A = \emptyset$ e quindi i convessi A e $S_r(y_0)$ sono separati da un funzionale lineare e continuo $f_0:Y \to R$ non nullo. Allora si ha per ogni $y\in S_r(y_0)$ e $a\in A$

$$f_0(y) < f_0(a)$$

e quindi, se $|u| < 1$ e $|f_0| = 1$,

$$f_0(y_0+ru) < f_0(a),$$

$$r\, f_0(u) < f_0(a-y_0) \le |f_0|\ |a-y_0| = |a-y_0|,$$

$$r = r \sup_{|u|\le 1} f_0(u) \le \inf_{a\in A} f_0(a-y_0) \le \inf_{a\in A} |a-y_0| = r,$$

come desiderato.

Lemma 4. Sia $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ uno spazio misurato, sia X uno spazio di Banach separabile e sia

$$\Omega \ni \omega \longrightarrow \Gamma(\omega) \neq \emptyset \text{ in } X$$

misurabile. Allora sono misurabili anche le multifunzioni

$$\Omega \ni \omega \longrightarrow \Gamma(\omega) \ , \quad \Omega \ni \omega \longrightarrow \overline{\text{co}}\Gamma(\omega)$$

Si ha per ogni $x \in X$, $x \notin \overline{\text{co}}\Gamma(\omega)$

$$d(x,\overline{\text{co}}\Gamma(\omega)) = d(x,\text{co}\Gamma(\omega)) = \inf_{y \in \text{co}\Gamma(\omega)} f_x(y-x)$$

con $f_x : X \to R$ lineare continuo, $|f_x| = 1$. Si ha poi

$$\inf_{y \in \text{co}\Gamma(\omega)} f_x(y-x) = \inf_{y \in \Gamma(\omega)} f_x(y-x) = \inf_{y \in \overline{\Gamma(\omega)}} f_x(y-x)$$

Siccome la funzione $\omega \to \overline{\Gamma(\omega)}$ è misurabile a valori non vuoti e chiusi, esiste una successione di funzioni misurabili σ_n tali che

$$\Omega \ni \omega \to \sigma_n(\omega) \in \overline{\Gamma(\omega)} = \overline{\{\sigma_k(\omega) \mid k \geq 1\}}$$

Ne segue

$$\inf_{y \in \overline{\Gamma(\omega)}} f_x(y-x) = \inf_{k \geq 1} f_x(\sigma_k(\omega)-x)$$

e quindi che le funzioni

$$\omega \to d(x,\overline{\text{co}}\ \Gamma(\omega)), \ \omega \to d(x,\text{co}\Gamma(\omega))$$

sono misurabili per ogni $x \in X$ (sono nulle per $x \in \overline{\text{co}}\ \Gamma(\omega)$). Questo conclude la dimostrazione ([4], dimostrazione del Theor. III.9).

Lemma 5. La multifunzione $\Omega \ni \omega \to V_0(\omega)$ è misurabile.

Per la dimostrazione basta applicare il Lemma 2 alla multifunzione

$$\Omega \times T \ni (\omega,t) \longrightarrow G(\omega,t) = g(\omega,t)S,$$

dopo aver provato che G è $\mathcal{A} \otimes \mathcal{L}$ misurabile. Per la separabilità di $X \supset S$, esiste una successione $N \ni n \to s_n \in S$ tale che

$$S = \overline{\{s_n | n \in N\}}$$

e quindi si ha, per ogni $x \in X$,

$$d(x,G(\omega,t)) = \inf_{n \geq 1} |x - g(\omega,t)s_n|.$$

Dalla misurabilità di g segue la misurabilità di

$$\Omega \times T \ni (\omega,t) \to d(x,G(\omega,t))$$

e di qui la misurabilità di G, dato che i valori di G sono chiusi (cfr. [4], Theor. III.9).

Lemma 6. Le multifunzioni U_n, U, V sono misurabili, per $n \geq 0$.

Per provare la misurabilità di U_n ragioniamo per induzione su n. La misurabilità di U_0 segue dalla misurabilità di V_0. Infatti si ha per ogni aperto $O \subset C(T,X)$

$$U_0^{-1}(O) = \{\omega \in \Omega | \bar{V}_0(\omega) \cap O \neq \emptyset\} =$$

$$= \{\omega \in \Omega | V_0(\omega) \cap O \neq \emptyset\} = V_0^{-1}(O).$$

Analogamente la misurabilità di U_{n+1} segue dalla misurabilità di V_n e di

$$\Omega \ni \omega \to I(\omega, U_n(\omega)) = V_n(\omega).$$

La misurabilità di V_n si ottiene dal Lemma 2 dopo aver provato che è $\mathcal{A} \otimes \mathcal{L}$ misurabile la funzione

$$\Omega \times T \ni (\omega,t) \longrightarrow G(\omega,t) = \overline{co}\ F(\omega,t,\overline{U_n(\omega)(t)}).$$

La funzione

$$T \ni t \longrightarrow U_n(\omega)(t)$$

è continua rispetto alla distanza di Hausdorff ([12], [5]) e la funzione

$$\Omega \ni \omega \longrightarrow U_n(\omega)(t)$$

è misurabile. Infatti per ipotesi U_n è misurabile e

$$U_n(\omega)(t) = \pi_t\,(U_n(\omega)),\quad \pi_t(u) = u(t).$$

Siccome π_t è continua, si può applicare il Lemma 1 con $H(\omega,u) = \pi_t(u)$ e $K(\omega)=U_n(\omega)$ e ottenere $L(\omega) = U_n(\omega)(t)$.

Ora possiamo applicare di nuovo il Lemma 1 con $H(\omega,t) = U_n(\omega)(t) \subset$ $\subset U_0(\omega)(t) \subset g_0(\omega)S$ e ottenere che H è $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(T)$ misurabile e quindi anche $\mathcal{A} \otimes \mathcal{L}$ misurabile. Procedendo come per U_0, di qui segue che è $\mathcal{A} \otimes \mathcal{L}$ misurabile anche la funzione

$$(\omega,t) \longrightarrow \overline{U_n(\omega)(t)}.$$

Dal Lemma 1 e relativa Osservazione segue la $\mathcal{A} \otimes \mathcal{L}$ misurabilità della funzione

$$(\omega,t) \longrightarrow F(\omega,t,\overline{U_n(\omega)(t)}).$$

Dal Lemma 4, con Ω sostituito da $\Omega \times T$ e $\mathcal{A}$ sostituito da $\mathcal{A} \otimes \mathcal{L}$, segue la misurabilità di

$$(\omega,t) \longrightarrow G(\omega,t)$$

e pertanto il Lemma 6 è provato.

Ora possiamo completare la dimostrazione della Proposizione 1. Siccome tutte le U_n sono misurabili a valori chiusi in $C(T,X)$, si ha

$$U_n \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(C(T,X)) \quad , \quad n \geq 0,$$

e di qui segue ([4], Theor. III.40)

$$U \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(C(T,X))$$

e quindi ([4], Theor. III.30) U è misurabile. Di qui, ragionando come nella dimostrazione del Lemma 6, segue che anche V è misurabile e questo conclude la dimostrazione della Proposizione 1.

Per applicare i risultati di [1] poniamo per ogni $(\omega,t,x) \in \Omega \times T \times X$ e $(\omega,u) \in \Omega \times C(T,X)$

$$\chi(\omega,x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad |x-x_0(\omega)| \leq g_0(\omega), \\ x_0(\omega) + g_0(\omega) \dfrac{x-x_0(\omega)}{|x-x_0(\omega)|} & \text{se} \quad |x-x_0(\omega)| > g_0(\omega), \end{cases}$$

$$G(\omega,t,x) = F(\omega,t,\chi(\omega,x)),$$

$$K(\omega,u) = \{v \in L^1(T,X) \mid v(t) \in G(\omega,t,u(t)), \quad t\text{-q.d.}\}.$$

La funzione $\chi(\omega,\cdot)$ è continua e $(\omega,t) \to \chi(\omega,x)$ è misurabile, quindi $G(\omega,t,\cdot)$ è continua e $G(\cdot,\cdot,x)$ è $\mathscr{A}\otimes\mathscr{L}$ misurabile. Si ha anche

$$G(\omega,t,x) \subset g(\omega,t)S$$

per ogni ω,t,x e allora segue dal Teorema 2 di [5], oppure da [7], che $K(\omega,u)$ è non vuoto, chiuso e decomponibile.

Proposizione 2. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un compatto $C_\varepsilon \subset \Omega$ tale che $\mu(\Omega\setminus C_\varepsilon) < \varepsilon$ e K è inferiormente semicontinua su $C_\varepsilon \times C(T,X)$.

Fissiamo $E \subset L^1(T,X)$ numerabile e denso. Siccome si ha per ogni aperto $O \subset L^1(T,X)$

$$O = \bigcup_{\substack{S_r(e)\subset O \\ e\in E,\ r>0}} S_r(e)$$

con $S_r(e) = \{v \in L^1(T,X) \mid \|v-e,\ L^1(T,X)\| < r\}$, per provare la semicontinuità inferiore di K è sufficiente provare che sono aperti gli insiemi

$$K^{-1}(S_r(e)) = \{(\omega,u) \mid d(e,\ K(\omega,u)) < r\}\ ,\quad e\in E,\quad r > 0,$$

e per questo è sufficiente la continuità della funzione $(\omega,u) \to d(e,K(\omega,u))$.

Lemma 7. Per ogni $e\in E$ la funzione

$$\Omega \times C(T,X) \ni (\omega,u) \to d(e,K(\omega,u))$$

è continua rispetto a u e misurabile rispetto a ω.

Si ha

$$d(e,K(\omega,u)) = \int_T d(e(t),\ G(\omega,t,u(t))dt.$$

Infatti, se $v \in K(\omega,u)$ si ha per quasi ogni $t \in T$

$$d(e(t),\ G(\omega,t,u(t))) \leq |e(t)-v(t)|$$

e quindi

$$\int_T d(e(t),\ G(\omega,t,u(t)))dt \leq \int_T |e(t)-v(t)|dt,$$

$$\int_T d(e(t),\ G(\omega,t,u(t)))dt \leq d(e,K(\omega,u)).$$

Per ogni $\omega \in \Omega$ la funzione $t \to G(\omega,t,u(t))$ è misurabile, per l'Osservazione al Lemma 1. Ora segue da [2], Lemma III.39, Application, che esiste una funzione misurabile v tale che

$$v(t) \in G(\omega,t,u(t)) \subset g(\omega,t)S, \quad t \in T,$$

$$|v(t)-e(t)| = d(e(t),\ G(w,t,u(t)), \quad t \in T$$

e questo prova la nostra formula.

Poiché la funzione

$$(\omega,t) \longrightarrow G(\omega,t,u(t))$$

è $\mathscr{A} \otimes \mathscr{L}$ misurabile (Lemma 1) e $d(\cdot,G(\omega,t,u(t)))$ è continua e $(\omega,t) \to e(t)$ è misurabile, sempre dal Lemma 1 segue che è $\mathscr{A} \otimes \mathscr{L}$ misurabile la funzione

$$(\omega,t) \to d(e(t),\ G(\omega,t,\ u(t))$$

e quindi che è misurabile la funzione

$$\omega \to d(e,K(\omega,u)) = \int_T d(e(t),\ G(\omega,t,u(t)))dt.$$

Proviamo che è continua la funzione

$$C(T,X) \ni u \longrightarrow d(e,K(\omega,u)).$$

Siano u_n, $u \in C(T,X)$ tali che

$$\|u_n - u,\ C(T,X)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Si ha(h = distanza di Hausdorff)

$$|d(e(t),\ G(\omega,t,u_n(t)) - d(e(t),\ G(\omega,t,u(t)))| \leq$$

$$\leq h[G(\omega,t,u_n(t)),\ \ G(\omega,t,u(t))] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

e inoltre

$$d(e(t),\ G(\omega,t,u(t))) \leq |e(t)| + g(\omega,t)$$

Dunque riesce

$$\lim_{n\to\infty} d(e,K(\omega,u_n)) = d(e,K(\omega,u))$$

e con questo il Lemma è provato.

Ora possiamo applicare il Teorema 2.1 di [1], tenendo conto dell'Osservazione 2.5, alla funzione

$$\Omega x C(T,X) \ni (\omega,u) \longrightarrow d(e,K(\omega,u))$$

e ottenere, per ogni fissato $\varepsilon>0$, un compatto $C_{\varepsilon,e}$ tale che $\mu(\Omega\setminus C_{\varepsilon,e}) < \varepsilon$ e che la funzione

$$C_{\varepsilon,e}\, x C(T,X) \ni (\omega,u) \longrightarrow d(e,K(\omega,u))$$

sia continua.

Sia

$$N \ni n \longrightarrow e_n \in E$$

una numerazione di E. Allora esistono dei compatti $C_{\varepsilon,n} \subset \Omega$ tali che $\mu(\Omega\setminus C_{\varepsilon,n}) < \varepsilon/2^n$ e

$$C_{\varepsilon,n} x C(T,X) \ni (\omega,u) \longrightarrow d(e_n,K(\omega,u)) \quad , \quad n\geq 1,$$

è continua. Poniamo

$$C_\varepsilon = \bigcap_{n\geq 1} C_{\varepsilon,n}.$$

Allora si ha $\mu(\Omega\setminus C_\varepsilon) < \varepsilon$ e le funzioni

$$C_\varepsilon x C(T,X) \ni (\omega,u) \longrightarrow d(e_n,K(\omega,u))$$

sono tutte continue. Per quanto osservato all'inizio della dimostrazione, di qui segue che la funzione

$$C_\varepsilon \times C(T,X) \ni (\omega,u) \longrightarrow K(\omega,u)$$

è inferiormente semicontinua. Con questo la Proposizione 2 è dimsotrata.

Proposizione 3. Se C_ε è come nella Proposizione 2, esiste una funzione continua k tale che

$$C_\varepsilon \times C(T,X) \ni (\omega,u) \longrightarrow k(\omega,u) \in K(\omega,u).$$

La Proposizione 3 segue dal Teorema 3 di [3].

Veniamo ora alla dimostrazione del Teorema. Poniamo per ogni $\omega \in C_\varepsilon$, $t \in T$, $u \in C(T,X)$

$$f(\omega,u)(t) = x_0(\omega) + \int_0^t k(\omega,u)(s)ds$$

Per il teorema di Lusin applicato a $x_0(\cdot)$ (cfr. anche [1], Theor. 2.1), non è restrittivo supporre $x_0(\cdot)$ continua su C_ε. Allora f è continua su $C_\varepsilon \times C(T,X)$; infatti si ha

$$\|f(\omega',u')-f(\omega,u),C(T,X)\| \leq |x_0(\omega')-x_0(\omega)| +$$

$$+ \|k(\omega',u') - k(\omega,u),\ L^1(T,X)\|$$

e k è continua. Dalla Proposizione 1 segue

$$u \in V(\omega) \subset V_0(\omega) \Rightarrow \exists\, v \in L^1(T,X):\ u(t) = x_0(\omega) + \int_0^t v(s)ds,$$

$$|v(s)| \leq g(\omega,s) \Rightarrow |u(t) - x_0(\omega)| \leq g_0(\omega)$$

$$k(\omega,u)(t) \in G(\omega,t,u(t)) = F(\omega,t,u(t)) \subset (t\text{-q.d.}) \quad \overline{co}\ F(\omega,t,\overline{V(\omega)(t)}) \Rightarrow$$

$$f(\omega,u) \in I(\omega,V(\omega)) \subset V(\omega) \neq \emptyset \quad \text{compatto, convesso.}$$

Dal teorema di punto unito di Schauder segue

$$\Phi(\omega) = \{u \in V(\omega) \mid f(\omega,u) - u = 0\} \neq \emptyset \quad , \quad \omega \in C_\varepsilon .$$

Per la continuità di $f(\omega,\cdot)$, $\Phi(\omega)$ è chiuso. Posto

$$f_1(\omega,u) = f(\omega,u) - u,$$

dalla continuità di f_1 e dalla misurabilità di

$$C_\varepsilon \ni \omega \longrightarrow V(\omega) \neq \emptyset \quad \text{chiuso}$$

segue

$$\Phi = V \cap f_1^{-1}(0) \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}(C(T,X))$$

e di qui segue ([4], Theor. III.30) che esiste una funzione misurabile ϕ tale che

$$C_\varepsilon \ni \omega \longrightarrow \phi(\omega) \in \Phi(\omega) \subset V(\omega)$$

Sempre per il teorema di Lusin possiamo supporre (eventualmente diminuendo C_ε) ϕ continua su C_ε. Allora la funzione

$$C_\varepsilon \ni \omega \longrightarrow x_\varepsilon(\omega,t) = \phi(\omega)(t)$$

è continua per ogni t e

$$x_\varepsilon(\omega,t) = x_0(\omega) + \int_0^t k(\omega,\phi(\omega))(s)ds,$$

$$k(\omega,\phi(\omega))(s) \in F(\omega,s,x_\varepsilon(\omega,s)) \quad , \quad s\text{-q.d.}$$

Poniamo

$$v_\varepsilon(\omega) = k(\omega, \phi(\omega))$$

Per concludere determiniamo la successione di compatti $C_n \subset \Omega$ con

$$\mu(\Omega \setminus C_n) < \frac{1}{n} \qquad (\varepsilon = \frac{1}{n})$$

e le successioni di funzioni $v_n = v_{1/n}$ e $x_n = x_{1/n}$ e poniamo

$$v(\omega) = \begin{cases} v_n(\omega) \text{ se } \omega \in C_n \setminus \bigcup_{k<n} C_k, \\ 0 \quad \text{se } \omega \notin \bigcup_{k\geq 1} C_k, \end{cases}$$

$$x(\omega,t) = x_0(\omega) + \int_0^t v(\omega)(s)ds \quad , \quad \omega \in \Omega \quad , \quad t \in T,$$

$$\Omega_0 = \Omega \setminus \bigcup_{k\geq 1} C_k$$

Questo conclude la dimostrazione del Teorema.

BIBLIOGRAFIA

[1] Z. ARTSTEIN, K. PRIKRY: Caratheodory selections and the Scorza-Dragoni property. J. Math. An. Appl. 127 (1987), 540-47.

[2] J.P. AUBIN, A. CELLINA: Differential inclusions. Springer, Berlin, 1984.

[3] A. BRESSAN, G. COLOMBO: Extensions and selections of maps with decomposable values. Studia Math. XC (1988), 69-86.

[4] C. CASTAING, V. VALADIER: Convex analysis and measurable multifunctions. Lecture Notes in Math. 580, Springer, 1977.

[5] A. CAVALLUCCI: Inclusioni differenziali con secondo membro inferiormente semicontinuo in uno spazio di Banach. Seminario di Analisi Matematica. Bologna, 1985-86.

[6] F.S. De BLASI, J. MYJAK: Random differential inclusions with non-convex right hand side. Funkc. Ekv. 30 (1987), 1-8.

[7] A. FRYSZKOWSKI: Continuous selections for a class of nonconvex multivalued maps. Studia Math. 76 (1983), 163-74.

[8] S. ITOH: Random fixed point theorems with an application to random differential equations in Banach sapces. J. Math. An. Appl. 67 (1979), 261-73.

[9] A. NOWAK: Application of random fixed point theorems in the theory of generalized random differential equations. Bull. Polish Acad. of Sciences. Mathem. 34, 7-8 (1986), 487-94.

[10] N.S. PAPAGEORGIOU: Random differential inclusions in Banach spaces. J. Diff. Eq. 65 (1986), 287-303.

[11] N.S. PAPAGEORGIOU: On measurable multifunctions with applications to random multivalued equations. Math. Japonica 32, 3 (1987), 437-64.

[12] A.A. TOLSTONOGOV, I.A. FINOGHENKO: Sulle soluzioni di un'inclusione differenziale con secondo membro inferiormente semicontinuo non convesso in uno spazio di Banach. Mat. Sbornik 125, 2 (1984), 198-230.